线性代数 中国科学技术大学 2023 春
线性方程组求解

主讲: 杨金榜
地空楼 525

助教: 苏煜庭、陈鉴、夏小凡

我们称有相同的解集的两个线性方程组互为对方的同解方程组.

定理

三种初等变换将线性方程组变为同解线性方程组.

定义

我们称由若干行及若干列的数组成的阵列为**矩阵**.

例如: 线性方程组

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \qquad (*)$$

的系数和常数项组成一个矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \qquad \longleftarrow (*) \text{ 的增广矩阵}$$

注：由于变元不参与运算，因此可以用增广矩阵来表示方程组。

矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

的最简形式、标准形式，如下 $(r \leq n)$

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & c_{1,j_1} & \cdots & c_{1,j_2} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{1,j_r} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ & & & & c_{2,j_2} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{2,j_r} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ & & & & & & \ddots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & & & & & c_{r,j_r} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ & & & & & & & & & & & d_{r+1} \\ & & & & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

定理

方程组(??)的解有如下性质:

1. 若 $d_{r+1} \neq 0$, 则无解;
2. 若 $d_{r+1} = 0$ 且 $r = n$, 则解唯一;
3. 若 $d_{r+1} = 0$ 且 $r < n$, 则有多解.

推论

1. 齐次线性方程组有非平凡解当且仅当 $r < n$.
2. 特别地，若齐次方程个数小于变量个数, 即 $m < n$，则其一定有非平凡解.

定义 (矩阵)

一个$m \times n$ 矩阵为由 $m \times n$ 个数排成的 m 行 n 列的阵列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

记作 $A = (a_{ij})_{m\times n}$. 称 a_{ij} 为矩阵 A 的第 (i,j) 元素; 当 $i = j$ 时,a_{ii} 也称为 A 的对角元.

若两个矩阵 A 和 B 的行数和列数相同且对应位置的元素都相同, 则称 A 与 B 相等, 记为 $A = B$. 否则称 A 与 B 不相等, 记为 $A \neq B$. 例如:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

按照矩阵行列数大小, 非零元分布或元素取值范围等, 我们有如下特殊矩阵命名:

1. n 维行向量 $:= 1 \times n$ 矩阵;
2. n 维列向量 $:= n \times 1$ 矩阵;
3. 零矩阵 O, 或 0;
4. n 阶方阵;
5. 单位阵 I;
6. 数量矩阵 aI;
7. 对角矩阵 $\mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_n)$;
8. 上 (下) 三角矩阵;
9. (反) 对称矩阵;
10. 整数矩阵;有理数矩阵;实矩阵;复矩阵;
11. 数域 $\mathbb{F}$ 上的矩阵;
12. 多项式矩阵.

例

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 为整系数对称 2 阶方阵.
- $\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} & -1 \\ -\sqrt{-1} & 0 & \pi \\ 1 & -\pi & 0 \end{pmatrix}$ 为复系数反对称 3 阶方阵.
- $\begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{3}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{3}} \end{pmatrix}$ 为复系数 2 阶数量矩阵.

定义 (加法与数乘)

设 λ 为数域 $\mathbb{F}$ 中的数. 取两个 $\mathbb{F}$ 系数的 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}\in\mathbb{F}^{m\times n}$. 定义

- 加法

$$A+B:=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}:=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix},$$

- 数乘

$$\lambda A:=(\lambda a_{ij})_{m\times n}:=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

类似地定义矩阵的减法运算和负矩阵:

$$A-B:=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n},\quad -A:=(-a_{ij})_{m\times n}.$$

注: 只有行数和列数相同的矩阵才可以相加减. 否则无意义.

例

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $A+B$ 和 $A-B$.
2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 求 $2A$.
3. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$.
   - 求 $3A+2B-4C$.
   - 若 $5A+3X=B$. 求 X.

类似于数的加法和乘法, 矩阵的加法和数乘运算满足如下八条基本性质:

定理

1. 加法交换律: $A+B=B+A$;
2. 加法结合律: $A+(B+C)=(A+B)+C$;
3. 有零矩阵: $A+0=A=0+A$;
4. 有负矩阵: $A+(-A)=0=(-A)+A$;
5. 数乘单位元: $1A=A$;
6. 数乘结合律: $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$;
7. 左分配律: $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$;
8. 右分配律: $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$;

其中 A, B, C 为使得运算有有意义的矩阵, λ, μ 为数.

基本矩阵

$$E_{ij} := \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{第 } j \text{ 列} \end{array} & \end{array}$$

引理

任意 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$ 都可以唯一的表示为基本矩阵的线性组合

$$A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}.$$

定义 (线性映射)

给定一个数组向量空间之间的映射 $\mathscr{A}: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$. 若 $\mathscr{A}$ 满足

$$\begin{aligned} &\text{(保持加法)} \quad \mathscr{A}(\vec{a}+\vec{b}) = \mathscr{A}(\vec{a}) + \mathscr{A}(\vec{b}); \\ &\text{(保持数乘)} \quad \mathscr{A}(\lambda\vec{a}) = \lambda\mathscr{A}(\vec{a}) \end{aligned} \qquad (*)$$

则 $\mathscr{A}$ 称为线性映射.

给定线性映射 $\mathscr{A}: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$. 考虑基本向量 $\vec{e}_j$ 在这个映射下的像

$$\mathscr{A}(\vec{e}_j) = \mathscr{A}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) =: \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

根据 $\mathscr{A}$ 为线性映射, 对于任意 $y_1, \cdots, y_n \in \mathbb{F}$, 我们有

$$\mathscr{A}\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ \vdots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mn}y_n \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

因此, 通过线性映射 $\mathscr{A}$, 可以得到一个矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$. 反之, 给定矩阵 A 我们可以通过$(*)$, 确定一个线性映射. 因此

$$\boxed{\mathbb{F}^{m\times n} \xleftrightarrow{1:1} \text{从 } \mathbb{F}^n \text{ 到 } \mathbb{F}^m \text{ 的全体线性映射.}}$$

引理

线性映射的合成仍然是线性映射.

设矩阵 $A=(a_{ik})_{m\times n}\in\mathbb{F}^{m\times n}$,$B=(b_{kj})_{n\times p}\in\mathbb{F}^{n\times p}$ 对应线性映射 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$. 即,

$$\mathscr{A}:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m,\quad (y_1,\cdots,y_n)\mapsto\left(\sum_{k=1}^n a_{1k}y_k,\sum_{j=k}^n a_{2k}y_k,\cdots,\sum_{k=1}^n a_{mk}y_k\right).$$

$$\mathscr{B}:\mathbb{F}^p\to\mathbb{F}^n,\quad (z_1,\cdots,z_p)\mapsto\left(\sum_{j=1}^p b_{1j}z_j,\sum_{j=1}^p b_{2j}z_j,\cdots,\sum_{j=1}^p b_{nj}z_j\right).$$

因此 $\mathscr{A}\circ\mathscr{B}(z_1,\cdots,z_p)=\left(\sum_{j=1}^p\left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\right)z_j\right)$. 记

$$C=(c_{ij})_{m\times p}\in\mathbb{F}^{m\times p},\quad 其中 c_{ij}=\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

则 $\mathscr{A}\circ\mathscr{B}$ 为矩阵 C 对应的线性变换.

注: 下面我们将这个矩阵 C 定义为矩阵 A 和 B 的乘积.

定义 (矩阵乘法)

设 $A=(a_{ik})_{m\times n}\in\mathbb{F}^{m\times n}$,$B=(b_{kj})_{n\times p}\in\mathbb{F}^{n\times p}$. 定义

$$AB := \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)_{m\times p} \in \mathbb{F}^{m\times p}.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

$$:= \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1}} & \cdots & \boxed{a_{11}b_{1p}+a_{12}b_{2p}+\cdots+a_{1n}b_{np}} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{m1}b_{11}+a_{m2}b_{21}+\cdots+a_{mn}b_{n1}} & \cdots & \boxed{a_{m1}b_{1p}+a_{m2}b_{2p}+\cdots+a_{mn}b_{np}} \end{pmatrix}$$

注: 并非任意两矩阵都可以相乘. 只有在 A 的列数等 B 的行数时, A 与 B 才可以相乘.

特别地，若 A 为方阵，我们可以定义 A 的方幂. 规定 $A^0 := I$ 并定义 $(k > 0)$:

$$A^k := \underbrace{AA\cdots A}_{k\text{ 个 }A}$$

例

已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 以及 $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. 求 AB, BA, CD, DC, C^2, D^2.

从这个例子，你发现了什么现象？

- $AB \neq BA$;
- $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ 或 $B = 0$.

例

已知 $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = \mathrm{diag}(b_1, \cdots, b_m), C = \mathrm{diag}(c_1, \cdots, c_n)$. 求 BA 和 AC.